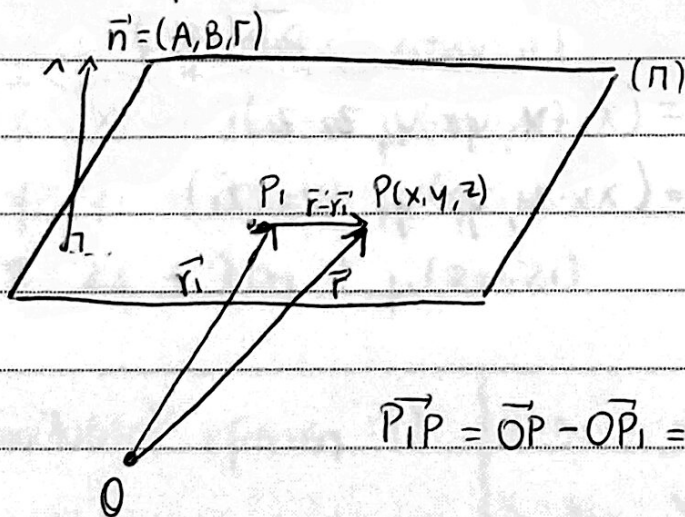


4/4/2017

Επιπεδο

- 6ημείο του και 2 διανυσματα
- 2 6ημεια του και 1 διανυσμα
- 3 6ημεια του.

~ Ένα 6ημείο του και ένα κάθετο διανυσμα στο επιπεδο



$$\vec{P_iP} = \vec{OP} - \vec{OP_i} = \vec{r} - \vec{r_i}$$

(*) Ένα διανυσμα είναι κάθετο σε επιπεδο, όταν αυτό είναι κάθετο σε κάθε διανυσμα του επιπέδου.

αφού το $\vec{n} \perp (\pi) \Rightarrow \vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r_i}) \Leftrightarrow \boxed{\vec{n} (\vec{r} - \vec{r_i}) = 0} \quad (1)$

Διανυσματική εξίσωση
του επιπέδου.

Αλλά $\vec{n} = (A, B, \Gamma)$

και $\vec{r} - \vec{r}_1 = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$

$$\stackrel{\textcircled{1}}{\Rightarrow} \boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) + \Gamma(z - z_1) = 0}$$

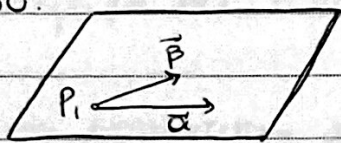
↑ αναλυτική εξίσωση επιπέδου

πχ το επίπεδο που διέρχεται από $P_1(1, 2, 3)$ και $\perp$ στο $\vec{n} = (1, 2, 3)$

$$\Rightarrow 1(x - 1) + 2(y - 2) + 3(z - 3) = 0$$

Παρατηρήσεις

① Έστω για ένα επίπεδο γνωστό ~ γνωρίζουμε πχ 2 διανύσματα (μη συγχρωμικά μεταξύ τους) και σημείο του.

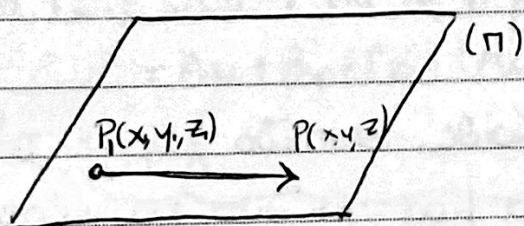


Προφανώς ένα διάνυσμα κάθετο στο (π) είναι το $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$

$$\left(\begin{array}{l} \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \perp \vec{\alpha}, \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \perp \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \perp (\pi) \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

② ~~Ε~~ Έστω επίπεδο $(Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0) \text{ (1)}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{πχ } 2x - 3y + 4z + 6 = 0 \\ (A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0) \end{array} \right.$



Εξίσωση επιπέδου (π)

$$P \in (\pi) \Rightarrow Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta = 0 \text{ (2)}$$

Απο (1) και (2)

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} = A(x - x_1) + B(y - y_1) + \Gamma(z - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow (A, B, \Gamma) \underset{\text{καθ' ὅσον διάνυσμα του } \pi}{(x - x_1, y - y_1, z - z_1)} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{r}_1 \vec{P} = 0 \Rightarrow \text{το } \vec{n} \perp \text{ σε τυχαίο διάνυσμα του } (\pi)$$

$$\Rightarrow \text{το } n \perp \text{ σε κάθε διάνυσμα } \varepsilon / \pi \Rightarrow n \perp (\pi)$$

$$2x - 3y + 4z + 6 = 0 \quad (1)$$

⊗ μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο (1)

$$\text{το } \vec{n} = (2, -3, 4) \perp (1)$$

$$\text{Μοναδιαίο κάθετο } \vec{n} = \frac{(2, -3, 4)}{\|n\|} = \frac{(2, -3, 4)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{(2, -3, 4)}{\sqrt{4 + 9 + 16}}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

③ αν $D=0 \Rightarrow \omega$ (1) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

$$④ Ax + By + Cz + D = 0$$

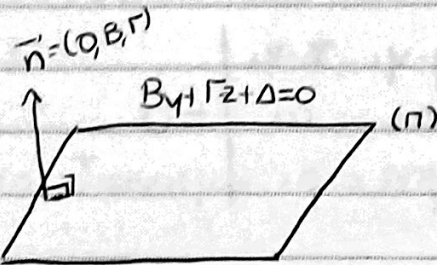
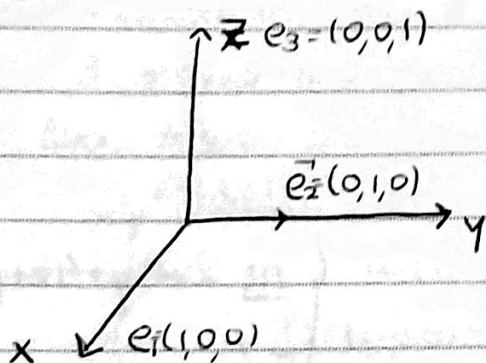
Αν $A=0$ (αντίστοιχα αν $B=0$ ή $C=0$) $\rightarrow (1) \parallel O_x$ (αντ. $(1) \parallel O_y$ ή $(1) \parallel O_z$)

$$\text{Έχουμε } 0x + By + Cz + D = 0 \quad (2) \quad (1)$$

Κάθετο διάνυσμα στο (2)

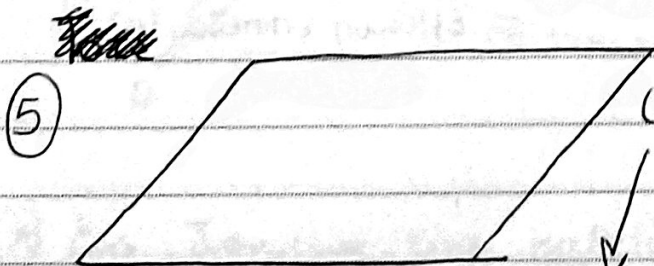
$\Rightarrow$ Ένα κάθετο διάνυσμα στο (1) είναι το

$$\vec{n} = (0, B, C) \perp (1)$$



$$\text{Παρατηρούμε ότι } \vec{n} \cdot \vec{e}_1 = (0, B, C) \cdot (1, 0, 0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot B + 0 \cdot C = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{e}_1 \\ \Rightarrow \vec{n} \perp (1) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{e}_1 \parallel (1) \text{ δηλ } (1) \parallel O_x \text{ (αξονα)}$$



⑤ Κάθε επίπεδο χωρίζει τον χώρο μας σε δύο ημιχώρους

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ΘΕΤΙΚΟ

(Τα σημεία αυτού επαληθεύουν

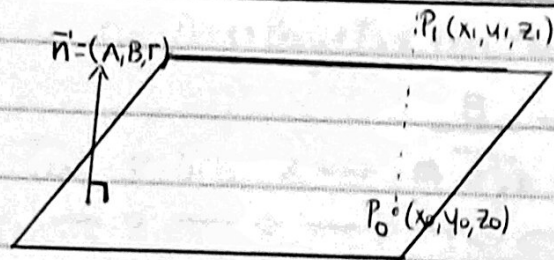
$$Ax + By + Cz + D > 0$$

θετικός ημιχώρος

ΑΡΝΗΤΙΚΟ

($Ax + By + Cz + D < 0$
αρνητικώς
αφ' ημιχώρος

Απόσταση σημείου από επίπεδο



$$P_0 \in (n) \Rightarrow Ax_1 + By_1 + Gz_1 + \Delta = 0$$

$$P_1 \notin (n) \Rightarrow Ax_1 + By_1 + Gz_1 + \Delta \neq 0$$

$$(n) Ax + By + Gz + \Delta = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + Gz_0 + \Delta = 0 \quad (*)$$

$$d(P_1, n) = \|P_0P_1\|$$

$$\text{Θ.δ.ο} \quad d(P, n) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Gz_1 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + G^2}}$$

όπου P_0 είναι η προβολή του P_1 στο επίπεδο (n)

Παρατηρούμε ότι $\vec{n} \perp (n)$ και $\vec{P_0P_1} \perp (n) \Rightarrow \vec{n}, \vec{P_0P_1}$ συγχρονικά

δηλ ότι σχηματίζουν γωνία 0 ή π

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} (\vec{n} = k \vec{P_0P_1}) \text{ σχηματίζουν γωνία } 0 \\ & \xleftarrow{\quad \quad \quad} \vec{n} = -k \vec{P_0P_1} \text{ σχηματίζουν γωνία } \pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{P_0P_1}) = \pm 1$$

$$\langle \vec{n}, \vec{P_0P_1} \rangle = \vec{n} \cdot \vec{P_0P_1} = \|\vec{n}\| \|\vec{P_0P_1}\| \cos(\vec{n}, \vec{P_0P_1})$$

$$\Rightarrow \|\vec{P_0P_1}\| = \pm \frac{\vec{n} \cdot \vec{P_0P_1}}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{P_0P_1}|}{\|\vec{n}\|} \stackrel{②}{=} \frac{|Ax_1 + By_1 + Gz_1 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + G^2}}$$

$$\begin{aligned} |\vec{n} \cdot \vec{P_0P_1}| &= (A, B, G) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + G(z_1 - z_0) = \\ &= Ax_1 + By_1 + Gz_1 - (Ax_0 + By_0 + Gz_0) \stackrel{(*)}{=} |Ax_1 + By_1 + Gz_1 + \Delta| \quad (2) \end{aligned}$$



πχ ① Να βρεθεί η απόσταση του $P(1, 2, 3)$ από το επίπεδο (n) , το οποίο διέρχεται από το $P_0(3, 4, 5)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-1, -1, 2)$

Λύση

$$\text{Αρχικά βρίσκουμε το επίπεδο } (n) \Rightarrow Ax + By + Gz + \Delta = 0$$

$$\text{Η εξίσωση } (n) \quad (-1)(x-3) + (-1)(y-4) + 2(z-5) = 0 \Rightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) + G(z-z_0) + \Delta = 0$$

όπου $(A, B, \Gamma) \perp (\pi)$
και $(x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$

$$\Rightarrow x - 3 + y - 4 + 2z - 10 = 0 \Rightarrow x + y + 2z - 17 = 0$$

$$\Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 17|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{6}}$$

② να βρεθεί η απόσταση των επιπέδων.
 $(\pi_1) \ 2x - y + 3z - 4 = 0$ και $(\pi_2) \ 6x - 3y + 9z + 6 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Γνωρίζουμε ότι } \vec{n}_1 = (2, -1, 3) \perp (\pi_1) \\ \vec{n}_2 = (6, -3, 9) \perp (\pi_2) \end{array} \right\} \Rightarrow (\pi_1) \parallel (\pi_2)$$

Παρατηρούμε ότι $\vec{n}_2 = 3\vec{n}_1$ (συγχρονιστικοί)

Έχει έννοια η εύρεση της απόστασης
στη συνέχεια, έστω τυχαίο σημείο $P \in (\pi_1)$
Θέλουμε $d(P, \pi_2) = d(\pi_1, \pi_2)$

ή έστω $P_1 = (1, 1, 1)$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} = \frac{|6 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 9^2}}$$

